

Zur stochastischen Abhängigkeit¹

JÖRG MEYER, HAMELN

¹ Original: On stochastic dependence.

In: *Teaching Statistics* 40 (2018) 1, S. 29–32.

Übersetzung: JÖRG MEYER

Zusammenfassung: Der Gegenbegriff zur stochastischen Unabhängigkeit zerfällt in zwei Teile: Ereignisse können sich gegenseitig begünstigen oder sich gegenseitig behindern. Beide Gegenbegriffe haben unerwartete und zum Teil kontraintuitive Eigenschaften. So findet zum Beispiel keine Transitivität statt. Die beiden Begriffe zur stochastischen Abhängigkeit werfen auch ein neues Licht auf das Simpson-Paradoxon.

1 Einleitung

Wenn man die Wahrscheinlichkeit $p(A)$ eines Ereignisses A mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(A|B)$ vergleicht, können drei Fälle auftreten:

Ist $p(A|B) = p(A)$, so sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig.

Ist $p(A|B) > p(A)$, so *begünstigt* Ereignis B das Auftreten von Ereignis A . Dieser Begriff geht auf Chung (1942) zurück.

Im dritten Fall *behindert* B das Auftreten von A .

Auf den ersten Blick ist dieser neue Begriff mit dem üblichen Gebrauch von „begünstigen“ in Einklang: Bedeutet A dasselbe wie „häufiger Regen im Jahr“ und B dasselbe wie „sich in England befinden“, so begünstigt B das Ereignis A . Daher überrascht es, dass der Begriff des stochastischen Begünstigens

symmetrisch ist: Ist $p(A) < p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, so

gilt auch $p(B) < p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. Wenn also A

das Ereignis B begünstigt, dann begünstigt auch B das Ereignis A . Bei der Formulierung des Sachverhalts und bei der Begründung wurde der uninteressante Fall ausgeschlossen, dass $p(A) = 0$ oder $p(B) = 0$ ist.

Weitere auf den ersten Blick verblüffende Eigenschaften der stochastischen Abhängigkeit werden in der Folge dargestellt. Meyer (2017) liefert ähnlich kontraintuitive Eigenschaften der stochastischen Unabhängigkeit.

2 „Begünstigen“ wird eingeführt

Eine Urne enthalte drei Kugeln mit den Aufschriften „1“, „2“ und „3“. Ansonsten seien die Kugeln nicht unterscheidbar, so dass die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Kugel zu ziehen, $1/3$ beträgt.

Nun wird eine Kugel gezogen, das Ergebnis jedoch geheim gehalten. Anne möchte wissen, ob die 3 gezogen wurde. Sie erfährt nur, dass es sich bei der gezogenen Kugel nicht um die 2 handelt. Dadurch steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 gezogen wurde,

$$\text{von } 1/3 \text{ auf } p(3|\text{nicht } 2) = \frac{|\{3\}|}{|\{1, 3\}|} = \frac{1}{2}.$$

Die Information, dass die 2 nicht gezogen wurde, erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass die 3 gezogen wurde.

Berthold möchte wissen, ob eine 1 oder eine 3 gezogen wurde. Man kann auch sagen, dass er wissen möchte, ob seine persönliche Pechzahl 2 vermieden wurde. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit so groß wie

$$p(\text{nicht } 2) = \frac{|\{1, 3\}|}{|\{1, 2, 3\}|} = \frac{2}{3}.$$

Erfährt er, dass die 3 gezogen wurde, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass keine 2 gezogen wurde, auf

$$p(\text{nicht } 2|3) = \frac{|\{3\}|}{|\{3\}|} = 1. \text{ So hat die Information, dass}$$

die 3 gezogen wurde, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 2 nicht gezogen wurde, ebenfalls erhöht.

Dies zeigt die Symmetrie von „begünstigen“ noch einmal an einem Beispiel. Man sollte daher nicht sagen, dass A das Ereignis B begünstigt, sondern besser sagen, dass die Ereignisse A und B einander begünstigen.

Da symmetrische Relationen auch ein symmetrisches Symbol haben sollten, wird der Sachverhalt, dass A und B einander begünstigen, durch $A \uparrow B$ gekennzeichnet.

Damit gilt im angeführten Beispiel: $3 \uparrow \text{„nicht } 2\text{“}$.

3 Zur Nichttransitivität

Das Beispiel des letzten Abschnitts lässt sich ausbauen. Man sieht leicht, dass auch $3 \uparrow \text{„nicht } 1\text{“}$ gilt, denn man hat

$$p(\text{nicht } 1) = \frac{|\{2, 3\}|}{|\{1, 2, 3\}|} = \frac{2}{3} < p(\text{nicht } 1|3)$$

$$= \frac{|\{3\}|}{|\{3\}|} = 1.$$

Zusammen ist also "nicht 2" \uparrow "3" und "3" \uparrow "nicht 1". Man würde vermuten wollen, dass dann auch "nicht 2" \uparrow "nicht 1" gilt, was jedoch wegen

$$p(\text{nicht } 2) = \frac{|\{1, 3\}|}{|\{1, 2, 3\}|} = \frac{2}{3} > p(\text{nicht } 2|\text{nicht } 1)$$

$$= \frac{|\{3\}|}{|\{2, 3\}|} = \frac{1}{2}$$

nicht zutrifft. Die Ereignisse „nicht 2“ und „nicht 1“ behindern einander.

Auch „behindern einander“ ist eine symmetrische Relation (die Begründung ist vollkommen analog zu derjenigen, dass „begünstigen einander“ symmetrisch ist). Als Symbol bietet sich „ \downarrow “ an, sodass "nicht 1" \downarrow "nicht 2" gilt.

Auch „behindern einander“ ist nicht transitiv. Beispiele hierfür sind leicht zu finden.

4 Zusammenhang zur Logik

Oben hat man gesehen, dass "nicht 1" \uparrow "3" und "nicht 1" \downarrow "nicht 2" gilt.

Dies ist erstaunlich, da „nicht 2“ die logische Konsequenz von „3“ ist. Es ist zwar verführerisch, jedoch falsch, von $A \uparrow B$ und $B \Rightarrow C$ auf $A \uparrow C$ zu schließen. „Begünstigen“ darf nicht mit „implizieren“ vermengt werden!

Falk/Bar-Hillel (1983, p. 244) betonen, dass „begünstigen“ und „implizieren“ zu unterschiedlichen Anwendungs- und Regelsystemen gehören.

5 Ein weiteres kleines Beispiel zur Nichttransitivität

Da die Annahme der Transitivität von „begünstigen“ trotz der Symmetrie dieser Relation so verführerisch ist, lohnt sich ein weiteres Beispiel als Übungsaufgabe:

Man werfe gleichzeitig einen roten und einen blauen Tetraeder (jeweils mit den Seiten 1, 2, 3, 4) und betrachte die Ereignisse

D = „Summe der Augenzahlen beträgt 4“,

E = „blauer Tetraeder zeigt 1“,

F = „Augenzahl des blauen Tetraeders ist kleiner als die des roten“.

Dann ist $D \uparrow E$, $E \uparrow F$, aber $D \downarrow F$.

6 Begünstigen und Behindern hängen zusammen

Ist \bar{B} das logische Gegenteil von B , so wird man vermuten, dass $A \uparrow B$ und $A \downarrow \bar{B}$ zueinander äquivalent sind. Vorsichtig geworden, wird man Beispiele sammeln und einen Beweis anstreben.

Aufgrund des Gesetzes von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$p(A) = p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B}).$$

$A \uparrow B$ bedeutet, dass $p(A) < p(A|B)$ ist, und daraus folgt

$$p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B})$$

$$= p(A) - p(A|B) \cdot p(B) < p(A) - p(A) \cdot p(B)$$

$$= p(A) \cdot p(\bar{B})$$

und somit $p(A|\bar{B}) < p(A)$, also $A \downarrow \bar{B}$.

Die umgekehrte Richtung zeigt man auf analoge Weise.

7 „Begünstigen“ ist keine Mengeneigenschaft, sondern hängt ab von den Wahrscheinlichkeiten

Man habe eine Urne $n > 4$ Kugeln (mit den Nummern 1, 2, ..., n) und betrachte die Ereignisse

G = „1 oder 2 wurde gezogen“ und

H = „2 oder 3 wurde gezogen“.

Für $n = 3$ ist $G \downarrow H$,

für $n = 4$ sind G und H stochastisch unabhängig,

für $n > 4$ ist $G \uparrow H$.

Die Kugeln 4, ..., n sind für die Ereignisse G und H als Mengen irrelevant, ändern jedoch die Wahrscheinlichkeiten von G und H .

8 Zusammenhang zum Simpson-Paradoxon

Es gibt Fälle, in denen das Simpson-Paradoxon gut durch bedingte Wahrscheinlichkeiten bzw. durch „Begünstigen“ und „Verhindern“ beschrieben werden kann.

Man betrachte zwei Urnen, wobei die erste eine schwarze Kugel enthält und die zweite eine weiße und drei schwarze Kugeln enthält (Abb. 1, obere Zeile).

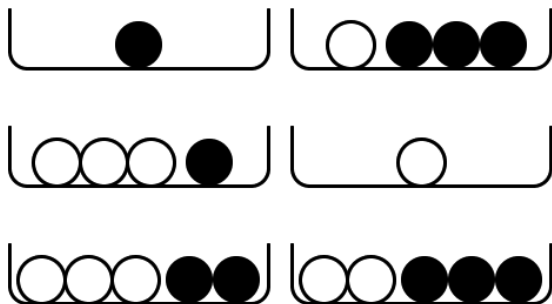


Abb. 1: Drei Beispiele von zwei Urnen

Eine Urne wird verdeckt ausgewählt und dann aus dieser Urne eine Kugel gezogen; sie ist weiß.

Welche Urne war gewählt worden?

Vor der Ziehung betrug die Wahrscheinlichkeit, die rechte Urne gewählt zu haben, 0,5. Nach der Ziehung hat man mehr Information; nun ist $p(\text{rechts}|\text{weiß}) = 1$, so dass rechts \uparrow weiß gilt.

Hat man hingegen die beiden Urnen der mittleren Zeile von Abb. 1, so gilt aufgrund des Satzes von Bayes (mit r, l, w, s als Abkürzungen), dass

$$p(r|w) = \frac{p(r) \cdot p(w|r)}{p(r) \cdot p(w|r) + p(l) \cdot p(w|l)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$$

und daher ebenfalls rechts \uparrow weiß gilt.

Bisher ist dies alles eher selbstverständlich und uninteressant. Dies ändert sich schlagartig, wenn beide Urnen zusammengeschüttet werden (untere Reihe in Abb. 1). Dann ist nämlich

$$p(\text{rechts zusammen}|\text{weiß}) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

und daher "rechts zusammen" \downarrow weiß.

Man sieht, dass „einander begünstigen“ nicht mit Vereinigungen kompatibel ist.

9 Ein weiteres Beispiel zum Simpson-Paradoxon

Man hat zwei Arbeitgeber, A und B (Tabelle 1). Bei A bewerben sich eine Frau und drei Männer; bis auf einen Mann sind sie alle erfolgreich. Wenn man an-

nimmt, dass Frauen und Männer für A gleich gut geeignet sind, gilt

$$\frac{3}{4} = h(\text{Erfolg}) < h(\text{Erfolg}|\text{Frau}) = 1$$

mit h als (bedingter) relativer Häufigkeit, so dass Frau \uparrow Erfolg.

Beim Arbeitgeber B bewerben sich 4 Frauen und 1 Mann. Nur eine Frau wird genommen. Wieder gilt wegen

$$\frac{1}{5} = h(\text{Erfolg}) < h(\text{Erfolg}|\text{Frau}) = \frac{1}{4}$$

und daher auch hier Frau \uparrow Erfolg.

Natürlich gerieten A und B in den Ruf, männerfeindlich zu sein. Beide Arbeitgeber haben sich daraufhin zusammengesetzt und verlautbart:

Wir hatten zusammen 9 Bewerber, davon 5 Frauen. Insgesamt wurden zwei Frauen eingestellt. Man hat dann Frau \downarrow Erfolg. Von Männerfeindlichkeit kann also keine Rede sein.

	A	
	Bewerber	genommen
Frauen	1	1
Männer	3	2

	B	
	Bewerber	genommen
Frauen	4	1
Männer	1	0

Tab. 1: Bewerbungszahlen

In Meyer (1995) finden sich weitere Beispiele für das Vorkommen des Simpson-Paradoxons.

Literatur

- Chung, K.-L. (1942). On mutually favorable events. In *The Annals of Mathematical Statistics* **13**(3), 338–349.
- Falk, R. and Bar-Hillel, M. (1983). Probabilistic dependence between events. In *The College Mathematics Journal*, **14**(3), 240–247.
- Meyer, J. (1995). Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik. In: *Stochastik in der Schule* **15**(2), S. 27 – 50.
- Meyer, J. (2017). Independence may feel strange. In *Teaching Statistics*, **39**(3), 96–99.

Anschrift des Verfassers

Dr. Jörg Meyer, Hameln
J.M.Meyer@t-online.de